

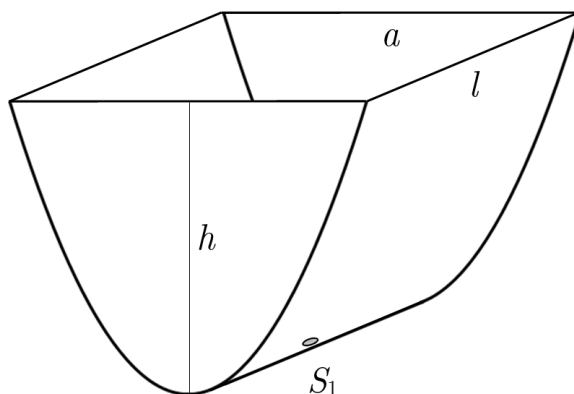
Úlohy 1. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Není-li uvedeno jinak, v úlohách uvažujte tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Pohyb hladiny ve žlabu

Žlab má výšku h , délku l a horní šířku a . Přední a zadní stěnu žlabu tvoří navzájem rovnoběžné plošné útvary ohraničené parabolou a vodorovnou úsečkou. Ve dně je malý otvor o obsahu S_1 . Žlab je zcela naplněn vodou.

- Určete dobu výtoku T vody ze žlabu.
- Určete potenciální tlakovou energii E_p vody ve žlabu.



Obr. 1

Vodu považujte za ideální kapalinu.

2. Bílý trpaslík

Nejjasnější hvězdou na noční obloze je Sirius v souhvězdí Velkého psa (astronomicky řečeno Alfa Canis Majoris). Jde o dvojhvězdu, přičemž menší z hvězd je bílý trpaslík, Sirius B. Jde o hvězdu s velmi vysokou hustotou, která vznikla gravitačním kolapsem původní hvězdy. Hmotnost Siria B je $M = 2,02 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, poloměr $R = 5\,600 \text{ km}$ a povrchová teplota $T = 25 \cdot 10^3 \text{ K}$.

- Určete střední hodnotu hustoty ρ hvězdy Sirius B.
- Bílého trpaslíka lze považovat za absolutně černé těleso. Určete vlnovou délku λ_m záření, pro kterou je spektrální hustota vyzařování maximální. Které části spektra tato vlnová délka odpovídá?
- Bílý trpaslík nemá vlastní zdroj energie (termonukleární reakce ve hvězdě vyhasla), a proto se jeho teplota postupně snižuje. Odhaduje se, že průměrná teplota Siria B poklesne o $\Delta T = 100 \text{ K}$ za dobu $\tau = 400$ milionů let. Určete střední hodnotu měrné tepelné kapacity c Siria B.

Jádro hvězdy Sirius B je tvořeno převážně uhlíkem a kyslíkem. Hvězda má však velmi tenkou atmosféru, která obsahuje převážně vodík. Přítomnost vodíku byla zjištěna spektrální analýzou světla přicházejícího z hvězdy. Při analýze spektra byl zjištěn gravitační červený posun vlnové délky záření. Světlo vodíkové výbojky obsahuje spektrální složku s vlnovou délkou $\lambda_0 = 486 \text{ nm}$.

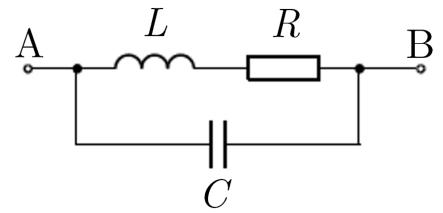
- d) Určete relativní změnu $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ vlnové délky uvedené vodíkové spektrální čáry světla Siria B vyzařovaného atmosférou hvězdy a pozorovaného pozemským spektroskopem, která je způsobena překonáním gravitačního pole hvězdy.

Nápověda: Od Louise de Broglieho víme, že foton má hybnost. Přiřaďte fotonu ekvivalentní hmotnost a zkoumejte jeho pohyb v gravitačním poli hvězdy.

Konstanta Wienova zákona $b = 2,89 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$, Stefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$, gravitační konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, rychlost světla ve vakuu $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. Vysokofrekvenční vlastnosti rezistoru

Základní vlastností rezistoru je elektrický odpor R . Když rezistorem prochází elektrický proud, vzniká v jeho okolí magnetické pole, které popisuje indukčnost L . Mezi svorkami rezistoru je napětí, tzn. v okolí rezistoru vzniká elektrické pole, které popisuje kapacita C . Funkci rezistoru v elektrickém obvodu znázorňuje náhradní schéma na obrázku 2.



Obr. 2

- a) Podle náhradního schématu na obr. 2 představuje rezistor paralelní rezonanční obvod. Určete rezonanční frekvenci f_0 tohoto obvodu a podmínku její existence.
- b) Posuďte, při jakých frekvencích má rezistor vlastnosti ideálního rezistoru, při jakých frekvencích má induktivní a při jakých kapacitní vlastnosti. Svoje tvrzení zdůvodněte.

K svorkám A, B rezistoru připojíme zdroj harmonického elektrického napětí s efektivní hodnotou U a frekvencí f .

- c) Nakreslete fázorový diagram obvodu. Určete fázový posuv φ mezi napětím a proudem.
- d) Určete činný výkon P zdroje napětí.

Řešte nejprve obecně a pak pro hodnoty $R = 600 \Omega$, $L = 2,0 \mu\text{H}$, $C = 3,0 \text{ pF}$, $U = 12 \text{ V}$, $f = 80 \text{ MHz}$.

4. Polonium

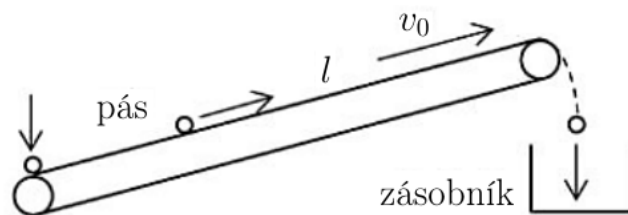
Laboratorní vzorek obsahuje 1,000 00 mg radioaktivního izotopu polonia 210.

- a) Určete složení jádra atomu polonia a porovnejte hmotnost určenou jako součet hmotností protonů a neutronů se skutečnou hmotností jádra atomu m_{Po} , která je $209,936 79 m_u$.
- b) Určete vazebnou energii jádra polonia 210.
- c) Po 50 dnech zbylo ve vzorku ještě $2,231 \cdot 10^{18}$ atomů polonia. Napište rovnici reakce, určete poločas rozpadu polonia T a počáteční aktivitu vzorku A_0 . Za jakou dobu bude ve vzorku ještě 10 % atomů původního izotopu?

Atomová hmotnostní konstanta $m_u = 1,660\,539 \cdot 10^{-27}$ kg. Klidová hmotnost protonu $m_p = 1,672\,62 \cdot 10^{-27}$ kg, neutronu $m_n = 1,674\,93 \cdot 10^{-27}$ kg. Rychlost světla ve vakuu $c = 2,997\,92 \cdot 10^8$ m \cdot s $^{-1}$, elementární náboj $e = 1,602\,18 \cdot 10^{-19}$ C, hmotnost elektronu $m_e = 9,109\,38 \cdot 10^{-31}$ kg.

5. Kulička na běžícím pásu

Gumový pás dopravníku s délkou l a úhlem sklonu α vzhledem k vodorovné rovině se pohybuje směrem nahoru rychlostí v_0 , viz obr. 3. Na dolní okraj pásu položíme homogenní kuličku. Kulička má nulovou počáteční rychlost v a nulovou úhlovou rychlost ω . Statický součinitel smykového tření mezi kuličkou a pásem je f .



Obr. 3

- Nakreslete obrázek kuličky na pásu za předpokládu, že pás kuličku unáší. Vyznačte v něm všechny síly, které na kuličku působí.
- Určete podmínku, při které by se kulička položená na stojící pás pohybovala dolů valivým pohybem (bez prokluzování). Určete zrychlení a hmotného středu kuličky při tomto valivém pohybu.
- Určete podmínku, která musí být splněna, aby se kulička položená na pásu začala pohybovat po běžícím pásu směrem nahoru.
- Odvoďte vztah pro vzdálenost d od dolního konce pásu, do které se kulička na pásu dostane.
- Sestrojte graf závislosti vzdálenosti d jako funkce úhlu α pro hodnoty $v_0 = 2,0$ m \cdot s $^{-1}$ a $f = 0,25$. Z grafu určete úhel sklonu α , při kterém kulička dosáhne horního konce pásu s délkou $l = 80$ cm a spadne do zásobníku.

Moment setrvačnosti koule vzhledem k ose procházející jejím středem je $I = \frac{2}{5}mR^2$, kde m je hmotnost koule a R její poloměr.

6. Praktická úloha: Měření ohniskové vzdálenosti čočky Besselovou metodou

Předmět (např. svíčku) a stínítko postavíme kolmo k optické ose tenké spojky tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla l . S výhodou k tomu můžeme využít optickou lavici z některé ze školních sad. Budeme-li pohybovat čočkou po optické ose v prostoru mezi předmětem a stínítkem, vytvoří se za určitých podmínek ostrý obraz při dvou polohách čočky.

- Stanovte, jakou podmínku musí splňovat poměr $\frac{l}{f}$, aby toto bylo splněno.
- Odvoďte vztahy pro výpočet poloh čočky a_1 , a_2 , aby oba obrazy byly ostré.

c) Označme $d = |a_1 - a_2|$. Dokažte, že pro ohniskovou vzdálenost čočky platí

$$f = \frac{l^2 - d^2}{4l}.$$

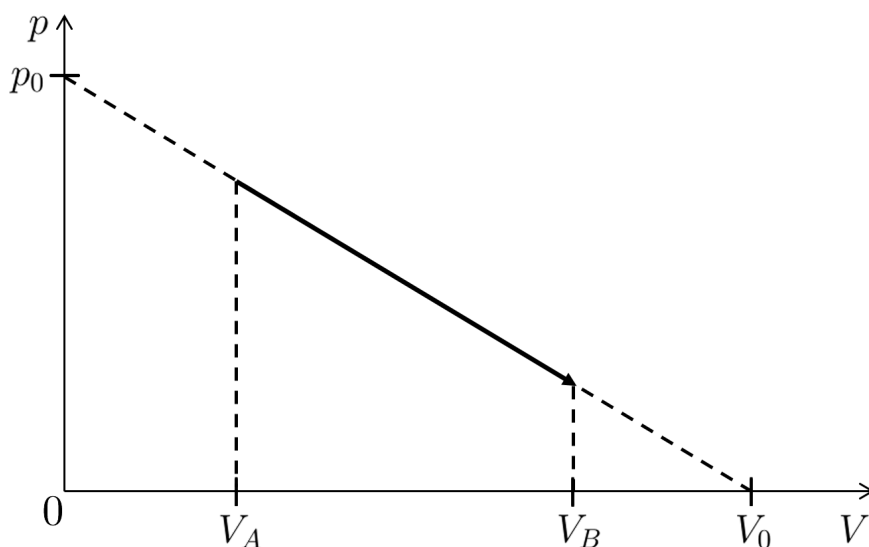
d) Proved'te vlastní měření l a d pro danou tenkou spojnou čočku. Pak proved'te výpočet ohniskové vzdálenosti čočky. Měření proved'te pro pět různých vzdáleností l , k nimž pak odměříte příslušná d .

7. Stlačování ideálního plynu

Ideální plyn pomalu přechází ze stavu A do stavu B procesem, který je v p - V diagramu znázorněn přímkou, vytínající na osách V a p úseky V_0 a p_0 (obr. 4). Plyn má v počátečním stavu A objem $V_A = \frac{V_0}{4}$ a teplotu T_A . V konečném stavu B má objem $V_B = \frac{3V_0}{4}$. Molární tepelná kapacita C_{Vm} plynu je $\frac{5R}{2}$, kde R je univerzální plynová konstanta. Pomocí zadaných hodnot určete:

- TLak a teplotu plynu po dosažení objemu V , $V_A \leq V \leq V_B$.
- Teplo Q , které z okolí přejde do plynu během přechodu $V_A \rightarrow V$.
- Během expanze plyn nejdříve teplo od okolí přijímá. Od jistého stavu C teplo do okolí naopak předává. Určete objem V_C plynu, při kterém dojde ke změně směru toku tepla.
- Určete množství tepla, které plyn během celého děje od A do B od okolí přijme, a množství tepla, které svému okolí naopak předá.

Ve výsledných vztazích nahraďte veličinu V bezrozměrným parametrem $x \equiv \frac{V}{V_0}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$.



Obr. 4